

Mathematischer Fitnessstest

für den Eintritt in eine technische Abteilung der HSR

(Version 1.2)

Die folgenden Aufgaben sollten alle ohne Unterlagen und ohne Rechner gelöst werden können.

Aufgabe 1

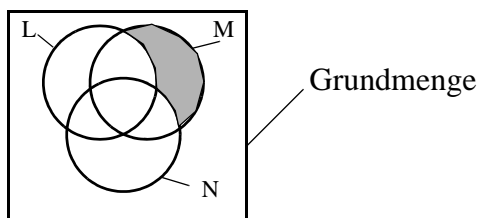
Berechnen Sie

- $(1 + \sqrt{2})^5 + (1 - \sqrt{2})^5$
- $\frac{8^{4/3} \sqrt{2}}{2^{-3/2}}$
- $\lg\left(\frac{100}{\sqrt[3]{10}}\right)$ (lg = Logarithmus zur Basis 10)
- $\sin^2(120^\circ) + \cos(240^\circ) + \tan(315^\circ)$
- alle Winkel im Bogenmass zwischen 0 und 2π , deren Sinus -0.5 ist.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{x \mid x(x-2)(x-4)(x-6) = 0\}$. Die Grundmenge sei $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Bestimmen Sie $\overline{A \cup B}$
- Schreiben Sie alle Teilmengen von A auf.
- Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? (\emptyset stellt die leere Menge dar.)
 $0 \in \{0\}, 0 \subset \{0\}, \{0\} \in \{0\}, \{0\} \subset \{0\}$
 $\emptyset \in \{0\}, \emptyset \subset \{0\}, \emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subset \{\emptyset\}$
- Welche Menge stellt die schraffierte Fläche dar?



- Schraffieren Sie die Menge $M \cap (N \cup \bar{L})$ in einem Mengendiagramm.

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie so weit wie möglich

- $\frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{4a^2-9} + \frac{5}{4a^2+2a-6}$
- $\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$
- $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab^3}}{a^{-3}b}}$
- $\log(x^2 - y^2) + \log\left(\frac{1}{x-y}\right) - \log((x+y)^2)$
- $(\sin(x) + \cos(x))^2 - \frac{2}{\tan(x) + \cot(x)}$
- $\frac{\sin(-x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos(x + \pi) + \cos(x + 2\pi) + \cos(x + 3\pi)}$

Aufgabe 4

a. Welches ist der Winkel zwischen 0° und 90° , dessen Sinus gleich dem $\cos(1000^\circ)$ ist?

b. Schreiben Sie den Term $\frac{a^{2/3}b^{-4/5}}{(a^{3/2}b^{-1/2})^{3/5}}$ möglichst einfach mit lauter Potenzen mit natürlichen Exponenten und mit einer einzigen Wurzel.

c. Schreiben Sie mit möglichst wenig trigonometrischen Funktionen:

$$\frac{2 \sin(90^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 180^\circ)}{\tan(\alpha + 90^\circ) - \cot(\alpha - 180^\circ)}$$

d. Ebenso:

$$2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4}{1 + \tan^2(x)}$$

e. Schreiben Sie möglichst wenig Logarithmen

$$\frac{2 \log(x) - \frac{1}{3} \log(y) + \log(y^3) + \frac{3}{4} \log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x+y) \log(x-y)}$$

Aufgabe 5

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x .

a. $\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} = \frac{4}{21}$

b. $\frac{1}{(1 + \sqrt{3})^{x-1}} - 1 = \sqrt{2}$

c. $\frac{a}{x^2 - a^2} + \frac{b}{x^2 - ax} = \frac{c}{x^2 + ax}$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge bezüglich x .

d. $\frac{11}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\ln(x^2 + e)}$

e. $\frac{\sqrt{3x+3} + 1}{\sqrt{5x-6}} = 1$

f. $\frac{1}{5-2x} > \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

Aufgabe 6

a. Für welche Zahlen a hat die Gleichung

$$\frac{5}{4}x^2 - (2a^2 - 3)x + a^2 + 1 = 0$$

genau eine Lösung x ?

b. Lösen Sie nach x :

$$\ln^2(x) + 1 = \ln(x^2) + a^2$$

c. Von einem Kreissektor kennt man den Radius $r = 3\text{cm}$ und den Flächeninhalt $A = 9\text{cm}^2$.

Berechnen Sie das Bogenmass $\widehat{\alpha}$ seines Winkels und seinen Bogen b .

d. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem nach x , y und z :

$$2x + 6y - 2z = 13$$

$$4x + 10y + 4z = 9$$

$$5x + 12y + 3z = 15$$

e. Für welchen Wert des Parameters b hat das folgenden Gleichungssystem für x , y und z Lösungen? Geben Sie zwei verschiedene Lösungen an.

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - 2z = 1$$

$$x + 3y + 4z = b$$

Lösung 1

- a. Beide Summanden können mit dem Binomischen Lehrsatz umgeformt werden. Dazu braucht man das Pascalsche Dreieck.

			1		
			1	1	
		1	2	1	
	1	3	3	1	
	1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1

Man erhält dann

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^5 + (1 - \sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^5 \\ &+ 1 - 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 - 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 - \sqrt{2}^5 \\ &= 82 \end{aligned}$$

- b. Wir schreiben alle Faktoren als Potenzen von 2

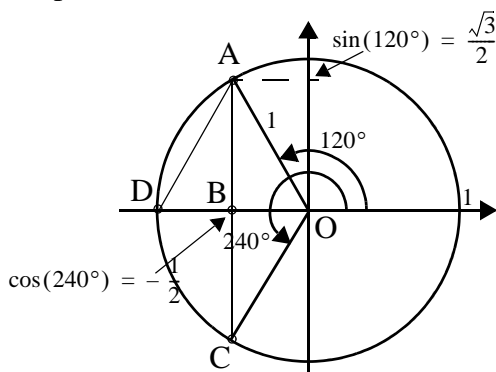
$$\begin{aligned} (2^3)^{4/3} 2^{1/2} 2^{3/2} &= 2^4 2^{1/2} 2^{3/2} = 2^{4 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \\ &= 2^6 = 64 \end{aligned}$$

- c. Der Logarithmus zur Basis 10 ist jener Exponent, mit dem man 10 potenzieren muss, um den Logarithmanden zu erhalten. Wir schreiben also $100/\sqrt[3]{10}$ als Potenz von 10:

$$\frac{100}{\sqrt[3]{10}} = \frac{10^2}{10^{1/3}} = 10^{2-1/3} = 10^{5/3}$$

Daher ist $\lg\left(\frac{100}{\sqrt[3]{10}}\right) = \frac{5}{3}$

- d. Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Ordinate zum Abstand (vom Ursprung) eines Punktes mit diesem Richtungswinkel (von der positiven Abszissenhalbachse aus gemessen). Insbesondere ist er also die Ordinate des entsprechenden Punktes auf dem Einheitskreis.



Der Cosinus ist gleich dem Verhältnis der Abszisse zum Abstand, also auch gleich der Abszisse des entsprechenden Punktes auf dem Einheitskreis (Abstand 1).

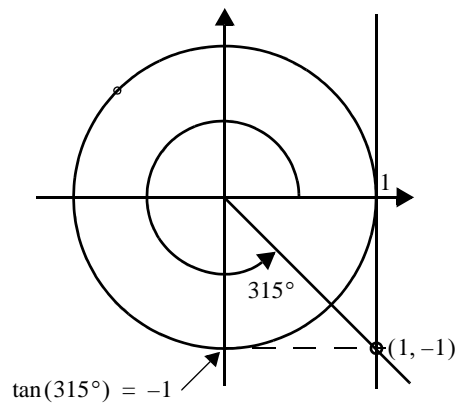
Das Dreieck OAD ist gleichseitig und die Höhe AB halbiert die Grundlinie OD

$$\overline{OB} = 1/2$$

Nach dem Pythagorassatz im Dreieck OAB gilt

$$\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = 1 \text{ und daraus } \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

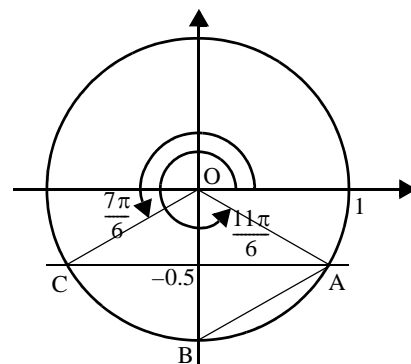
Der Tangens eines Winkels ist das Verhältnis der Ordinate zur Abszisse eines beliebigen Punktes mit diesem Richtungswinkel, insbesondere des Punktes mit der Abszisse 1. Damit ist er auch gleich der Ordinate des Punktes auf der im Punkt (1, 0) errichteten Tangente an den Einheitskreis..



Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin^2(120^\circ) + \cos(240^\circ) + \tan(315^\circ) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

- e. Wir brauchen also die Richtungswinkel jener Punkte auf dem Einheitskreis, deren Ordinate -0.5 ist.



Im Dreieck OAB halbiert die Höhe durch A die Gegenseite. Daher ist $\overline{AO} = \overline{AB} = 1$. Das Dreieck ist somit gleichseitig. Der Winkel BOA und aus Symmetriegründen auch der Winkel COB messen daher $\pi/3$

Die beiden gesuchten Winkel sind somit

$$\frac{7\pi}{6} \text{ und } \frac{11\pi}{6}$$

Lösung 2

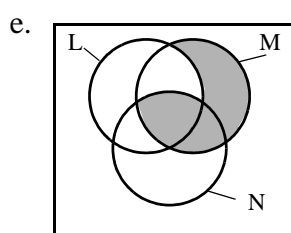
B ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x(x-2)(x-4)(x-6) = 0.$$

Das Produkt auf der linken Seite ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, x also gleich 0, 2, 4 oder 6 ist.

$$B = \{0, 2, 4, 6\}$$

- a. $\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 2, 3\} \cup \{0, 2, 4, 6\}}$
 $= \overline{\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}} = \{5, 7, 8, 9\}$
- b. $\{ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
 $\{1, 2, 3\}$
- c. Richtig sind folgende Aussagen: $0 \in \{0\}$,
 $\{0\} \subset \{0\}$, $\emptyset \subset \{0\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
- d. $M \cap \overline{L} \cap \overline{N} = M \cap \overline{L \cup N}$



Lösung 3

- a. Die Nenner des zweiten und dritten Bruches können faktorisiert werden

$$\frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{(2a-3)(2a+3)} + \frac{5}{2(2a+3)(a-1)}$$

Der kleinste gemeinsame Nenner ist demnach $2(2a-3)(2a+3)(a-1)$. Wir machen die Brüche gleichnamig, addieren und kürzen dann

$$\begin{aligned} & \frac{2(2a+3)}{2(2a-3)(2a+3)(a-1)} \\ & - \frac{12(a-1)}{12(a-1) \cdot 2(2a-3)(2a+3)(a-1)} \\ & + \frac{5(2a-3)}{5(2a-3) \cdot 2(2a-3)(2a+3)(a-1)} \\ & = \frac{2(2a+3) - 12(a-1) + 5(2a-3)}{2(2a-3)(2a+3)(a-1)} \\ & = \frac{2a+3}{2(2a-3)(2a+3)(a-1)} \\ & = \frac{1}{2(2a-3)(a-1)} \end{aligned}$$

- b. Zuerst fassen wir den Zähler und den Nenner des Hauptbruches zusammen:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{1-x^4}+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1-x^4}+1}{\sqrt{1-x^4}}$$

Nun kann der Doppelbruch vereinfacht werden

$$\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}+1} = \frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Der Quotient der Wurzeln kann zu einer Wurzel zusammengefasst, der Zähler faktorisiert und dann gekürzt werden:

$$\sqrt{\frac{(1-x^2)(x^2+1)}{x^2+1}} = \sqrt{1-x^2}$$

c. $3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab^3}}{a^{-3}b}} = 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{ab^3}{a^{-6}b^2}}} = 6\sqrt[6]{a^{1+6}b^{3-2}} = 6\sqrt[6]{a^7b}$

- d. Die Summe der ersten beiden Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Produktes ihrer Logarithmanden

$$\log\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right) - \log((x+y)^2)$$

und die Differenz von zwei Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Quotienten

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{x^2-y^2}{(x-y)(x+y)^2}\right) &= \log\left(\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{x+y}\right) = -\log(x+y) \end{aligned}$$

- e. Wir stellen den Tangens und den Cotangens als Quotienten von Sinus und Cosinus dar und ver-

einfachen dann den so entstandenen Doppelbruch

$$\begin{aligned}
 & (\sin(x) + \cos(x))^2 - \frac{2}{\tan(x) + \cot(x)} \\
 &= (\sin(x) + \cos(x))^2 - \frac{2}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}} \\
 &= (\sin(x) + \cos(x))^2 - \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sin^2(x) + \cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

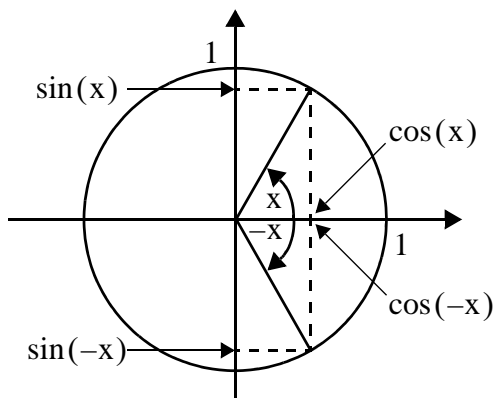
Der Nenner des Bruches ist 1. Beim 1. Summanden wenden wir den Binomischen Lehrsatz an.

$$\begin{aligned}
 & \sin^2(x) + 2 \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x) \\
 & - 2 \sin(x) \cos(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1
 \end{aligned}$$

$$\sin(-x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

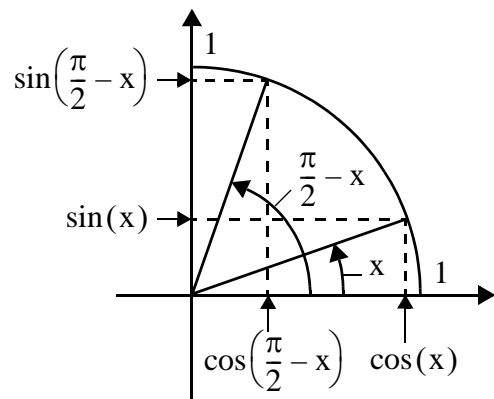
f.
$$\frac{\sin(-x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos(x + \pi) + \cos(x + 2\pi) + \cos(x + 3\pi)}$$

Ein Vorzeichenwechsel des Winkels bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Sinuswertes, beeinflusst jedoch den Kosinuswert nicht, wie die folgende Interpretation am Einheitskreis zeigt:



$$\sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x)$$

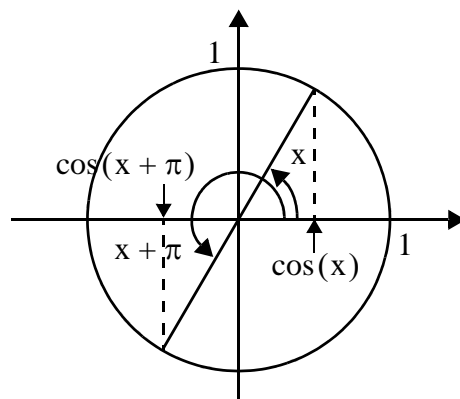
Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Komplementwinkels und der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus des Komplementwinkels



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \text{ und}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

Die Addition von π zum Winkel ändert das Vorzeichen des Kosinuswertes.



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x),$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ und}$$

$$\cos(x + 3\pi) = -\cos(x)$$

Mit diesen Beziehungen lässt sich der gegebene Ausdruck vereinfachen

$$\frac{-\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) + \sin(x)}{-\cos(x) + \cos(x) - \cos(x)}$$

$$= \frac{2 \cos(x)}{-\cos(x)} = -2$$

Lösung 4

a. Wir formen $\cos(1000^\circ)$ mit Hilfe der Quadrantenbeziehungen um. Zuerst subtrahieren wir $3 \cdot 360^\circ$

$$\cos(1000^\circ) = \cos(-80^\circ)$$

Vorzeichenwechsel des Winkels ändert den Cosinuswert nicht:

$$\cos(1000^\circ) = \cos(80^\circ)$$

Der Cosinus eines Winkels ist der Sinus seines Komplementwinkels

$$\cos(1000^\circ) = \sin(10^\circ)$$

Der gesuchte Winkel ist daher 10° .

Alternativ kann man diese Aufgabe auch mit Hilfe eines Diagramms mit dem Einheitskreis lösen (siehe auch Lösung zur Aufgabe 1d).

- b. Zuerst vereinfachen wir den Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{a^{2/3}b^{-4/5}}{(a^{3/2}b^{-1/2})^{3/5}} = \frac{a^{2/3}b^{-4/5}}{a^{9/10}b^{-3/10}} = a^{-7/30}b^{-1/2}$$

Nun schaffen wir die negativen Potenzen weg, machen die Brüche in den Exponenten gleichnamig und wenden das Gesetz über Potenzen von Potenzen an.

$$\frac{1}{a^{7/30}b^{1/2}} = \frac{1}{a^{7/30}b^{15/30}} = \frac{1}{(a^7b^{15})^{1/30}}$$

Schliesslich kann der gebroche Exponent als Wurzel geschrieben werden.

$$\frac{1}{\sqrt[30]{a^7b^{15}}}$$

- c. Wir vereinfachen die Funktionswerte mit den Quadrantenbeziehungen

$$\frac{2 \sin(90^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 180^\circ)}{\tan(\alpha + 90^\circ) - \cot(\alpha - 180^\circ)} = \frac{2 \cos(\alpha) - \cos(\alpha)}{-\cot(\alpha) - \cot(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{-2 \cot(\alpha)}$$

und drücken den Cotangens durch Sinus und Cosinus aus

$$\frac{\cos(\alpha)}{-2 \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} = -\frac{\sin(\alpha)}{2}$$

- d. Der Tangens lässt sich durch Sinus und Cosinus ausdrücken:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\text{Daher ist } \tan^2(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Damit können wir den gegebenen Term wie folgt umformen

$$\begin{aligned} 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ = 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ = 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4 \cos^2(x)}{\sin^2(x) + \cos^2(x)} \end{aligned}$$

Ferner gilt trigonometrische Pythagorassatz

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Damit erhält man

$$2 \sin^2(x) + \cos^2(x).$$

Ferner kann man mit Hilfe des trigonometrischen Pythagorassatzes entweder $\cos^2(x)$ durch $1 - \sin^2(x)$ ersetzen oder $\sin^2(x)$ durch $1 - \cos^2(x)$. Im ersten Fall erhält man

$$\sin^2(x) + 1$$

und im zweiten

$$2 - \cos^2(x).$$

- e. Wir verschieben alle Faktoren vor den Logarithmen in den Exponenten der Logarithmanden

$$\frac{\log(x^2) - \log(y^{1/3}) + \log(y^3) + \log\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{3/4}\right)}{\log(x+y)\log(x-y)}$$

Die Summe von Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Produktes der Logarithmanden und ihre Differenz ist gleich dem Logarithmus ihres Quotienten

$$\frac{\log\left(\frac{x^2 y^3 \left(\frac{1}{x}\right)^{3/4}}{y^{1/3} x}\right)}{\log(x+y)\log(x-y)}$$

Der Logarithmand des Zählers kann mit Hilfe der Potenzgesetze noch vereinfacht werden:

$$\frac{\log\left(\frac{x^2y^3}{y^{1/3}x^{3/4}}\right)}{\log(x+y)\log(x-y)} = \frac{\log(x^{5/4}y^{8/3})}{\log(x+y)\log(x-y)}$$

Beachten Sie, dass der Nenner nicht vereinfacht werden kann!

Lösung 5

a. In der vorliegenden Gleichung

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} = \frac{4}{21}$$

kommt die Unbekannte nur einmal vor. In einem solchen Fall kann man sie systematisch isolieren. Die linke Seite ist eine Differenz, wobei der 1. Operand die Unbekannte nicht enthält; wir schaffen ihn daher nach rechts.

$$-\frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} = \frac{4}{21} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{7}$$

Nach Vorzeichenwechsel nimmt man beidseitig den Kehrwert

$$\frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} = 7$$

Die Summanden, welche die Unbekannte nicht enthalten, werden nach rechts geschafft.

$$\frac{1}{5x+11} = \frac{1}{13}$$

Nun geht man wieder zu den Kehrwerten über

$$5x+11 = 13$$

und isoliert x

$$x = \frac{2}{5}$$

b. x wird wieder wie in der vorhergehenden Aufgabe systematisch isoliert

$$\frac{1}{(1+\sqrt{3})^{x-1}} - 1 = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{(1+\sqrt{3})^{x-1}} = \sqrt{2} + 1$$

$$(1+\sqrt{3})^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Die Unbekannte steht jetzt im Exponenten.

Man kriegt sie durch Logarithmieren (mit einer beliebigen Logarithmensorte) nach unten

$$\log((1+\sqrt{3})^{x-1}) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$(x-1)\log(1+\sqrt{3}) = -\log(\sqrt{2}+1)$$

Jetzt kann x mit elementaren Operationen isoliert werden

$$x-1 = \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\log(\sqrt{3}+1)}$$

$$x = 1 - \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\log(\sqrt{3}+1)}$$

Bemerkung: Für die beiden Logarithmen kann eine beliebige (aber natürlich die gleiche) Basis gewählt werden.

c. Am einfachsten multipliziert man die ganze Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner aller Brüche $x(x-a)(x+a)$:

$$\frac{ax(x-a)(x+a)}{(x-a)(x+a)} + \frac{bx(x-a)(x+a)}{x(x-a)} = \frac{cx(x-a)(x+a)}{x(x+a)}$$

Jetzt können alle Brüche gekürzt werden:

$$ax + b(x+a) = c(x-a)$$

$$ax + bx + ab = cx - ac$$

Nun werden die Summanden, welche die Unbekannte enthalten, auf die linke Seite, die übrigen auf die rechte Seite geschafft

$$ax + bx - cx = -ac - ab,$$

x ausgeklammert

$$x(a+b-c) = -ac - ab$$

und isoliert

$$x = \frac{-ac - ab}{a+b-c} = \frac{a(b+c)}{c-a-b}$$

d. Wir isolieren den Summanden, welcher die Unbekannte enthält, auf der rechten Seite

$$\frac{1}{\ln(x^2+e)} = \frac{7}{6}$$

und nehmen beidseitig den Kehrwert

$$\ln(x^2 + e) = \frac{6}{7}$$

Den Logarithmus kann man durch Exponentieren zur Basis e wegschaffen

$$x^2 + e = e^{6/7}$$

$$x^2 = e^{6/7} - e$$

Die rechte Seite ist negativ (denn $e^{6/7}$ ist kleiner als $e = e^{7/7}$!). Die Gleichung ist unerfüllbar, weil ein Quadrat natürlich nicht negativ sein kann. Die Lösungsmenge ist somit leer.

{ } oder, was dasselbe ist: \emptyset

e. Wir multiplizieren die Gleichung mit dem Nenner der linken Seite

$$\sqrt{3x+3} + 1 = \sqrt{5x-6}$$

und quadrieren, um die Wurzeln auf der rechten Seite wegzuschaffen. Dabei können Fremdlösungen entstehen!

$$3x + 3 + 2\sqrt{3x+3} + 1 = 5x - 6$$

Wir isolieren den Summanden mit der verbleibende Wurzel

$$2\sqrt{3x+3} = 2x - 10$$

$$\sqrt{3x+3} = x - 5$$

und quadrieren nochmals

$$3x + 3 = x^2 - 10x + 25$$

Das ist eine quadratische Gleichung, welche wir auf die Normalform bringen

$$x^2 - 13x + 22 = 0$$

Die Diskriminante $D = 13^2 - 88 = 81$ ist positiv; die quadratische Gleichung hat also zwei Lösungen, nämlich

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2} \text{ also } x_1 = 11 \text{ und } x_2 = 2$$

Diese Zahlen müssen, wegen möglicher Fremdlösungen, in der ursprünglichen Gleichung überprüft werden.

Für x_1 erhalten wir $\frac{\sqrt{36+1}}{\sqrt{49}} = 1$, was stimmt

und für x_2 : $\frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{4}} = 1$, was nicht stimmt.

Die Lösungsmenge ist daher $\{11\}$.

$$\text{f. } \frac{1}{5-2x} > \frac{1}{1-2\sqrt{2}}$$

Die Ungleichung muss mit beiden Nennern multipliziert werden. Der Nenner der rechten Seite ist negativ, weshalb dabei das Vergleichszeichen umgedreht werden muss.

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{5-2x} < 1$$

Nun muss noch mit dem Nenner der linken Seite multipliziert werden. Sein Vorzeichen hängt vom Wert von x ab. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:

- Wenn $5 - 2x > 0$, also $x < \frac{5}{2}$ ist:

Dann darf ohne Weiteres multipliziert werden:

$$1 - 2\sqrt{2} < 5 - 2x$$

$$2x < 4 + 2\sqrt{2}$$

$$x < 2 + \sqrt{2}$$

Die Zahl auf der rechten Seite ist grösser als 3, weshalb diese Ungleichung für alle in Betracht gezogenen Werte mit $x < \frac{5}{2}$ erfüllt ist.

- Wenn $5 - 2x < 0$, also $x > \frac{5}{2}$ ist:

Dann darf auch multipliziert werden, wobei jedoch gleichzeitig das Vergleichszeichen umzudrehen ist. $1 - 2\sqrt{2} > 5 - 2x$

$$2x > 4 + 2\sqrt{2}$$

$$x > 2 + \sqrt{2}$$

Wir fassen zusammen: Die Ungleichung ist erfüllt, wenn

$$x < \frac{5}{2} \text{ oder } x > 2 + \sqrt{2}$$

gilt. Die Lösungsmenge ist daher

$$\left\{ x \mid x < \frac{5}{2} \right\} \cup \left\{ x \mid x > 2 + \sqrt{2} \right\}$$

oder eleganter, mit Intervallen geschrieben:

$$\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty)$$

Lösung 6

- a. Die vorliegende Gleichung ist quadratisch in x . Sie hat genau eine Lösung, wenn die Diskriminante 0 ist, also

$$[-(2a^2 - 3)]^2 - 4 \cdot \frac{5}{4}(a^2 + 1) = 0$$

daraus

$$4a^4 - 17a^2 + 4 = 0$$

Das ist eine biquadratische Gleichung für a (d.h. eine quadratische Gleichung für a^2).

$$4(a^2)^2 - 17a^2 + 4 = 0$$

Die Diskriminante ist

$$D = 17^2 - 64 = 225$$

Sie ist positiv, weshalb die Gleichung zwei Lösungen für a^2 besitzt, nämlich

$$a^2 = \frac{17 \pm \sqrt{D}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$a^2 = 4 \text{ oder } a^2 = \frac{1}{4}$$

Nun kann a berechnet werden

$$a = \pm 2 \text{ oder } a = \pm \frac{1}{2}$$

- b. Der Logarithmus auf der rechten Seite kann umgeformt werden

$$\ln^2(x) + 1 = 2 \ln(x) + a^2$$

Die Gleichung präsentiert sich nun als quadratisch in $\ln(x)$. Man kann

$$y = \ln(x)$$

substituieren und erhält damit die quadratische Gleichung für y

$$y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0$$

Die Diskriminante $D = 4 - 4(1 - a^2) = 4a^2$ ist positiv, somit

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4a^2}}{2} = 1 \pm a$$

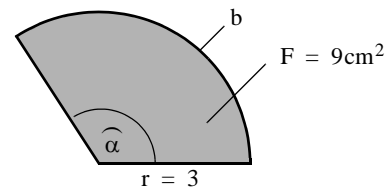
In die Substitutionsgleichung eingesetzt erhält man

$$\ln(x) = 1 \pm a$$

Den Logarithmus schafft man durch Exponenzieren zur Basis e weg.

$$x = e^{1 \pm a}$$

c.



Für die Fläche gilt

$$F = r^2 \pi \frac{\widehat{\alpha}}{2\pi} = \frac{r^2 \widehat{\alpha}}{2}$$

Die gegebenen Werte eingesetzt

$$9 \text{ cm}^2 = \frac{(3 \text{ cm})^2 \widehat{\alpha}}{2}$$

Daraus den Winkel im Bogenmaß

$$\widehat{\alpha} = 2$$

und die Bogenlänge

$$b = r \widehat{\alpha} = 6 \text{ cm}$$

d. $2x + 6y - 2z = 13$

$$4x + 10y + 4z = 9$$

$$5x + 12y + 3z = 15$$

Wir eliminieren z.B. z mit Hilfe der ersten Gleichung aus der zweiten und dritten Gleichung. Zu diesem Zweck addieren wir das Doppelte der ersten Gleichung zur zweiten und das $(3/2)$ -fache der ersten zur dritten.

$$2x + 6y - 2z = 13$$

$$8x + 22y = 35$$

$$8x + 21y = \frac{69}{2}$$

Nun eliminieren wir x mit Hilfe der dritten Gleichung aus der zweiten, indem wir die dritte von der zweiten subtrahieren.

$$2x + 6y - 2z = 13$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$8x + 21y = \frac{69}{2}$$

y in die letzte Gleichung eingesetzt ergibt

$$8x + \frac{21}{2} = \frac{69}{2} \text{ daraus } x = 3$$

x und y in die erste Gleichung eingesetzt ergibt

$$2(3) + 6\left(\frac{1}{2}\right) - 2z = 13$$

daraus $z = -2$

Zusammengefasst:

$$x = 3, y = \frac{1}{2}, z = -2$$

e. $x + y + z = 0$

$$x - y - 2z = 1$$

$$x + 3y + 4z = b$$

Wir eliminieren x mit Hilfe der ersten Gleichung aus der zweiten und dritten Gleichung, indem wir die erste Gleichung von der zweiten und dritten subtrahieren

$$x + y + z = 0$$

$$-2y - 3z = 1$$

$$2y + 3z = b$$

Nun eliminieren wir y mit Hilfe der zweiten Gleichung aus der dritten, indem wir jene zu dieser addieren

$$x + y + z = 0$$

$$-2y - 3z = 1$$

$$0 = b + 1$$

Die letzte Gleichung stimmt nur, wenn

$$b = -1$$

ist. Somit kann das Gleichungssystem nur für diesen Wert von b Lösungen besitzen.

In diesem Fall lautet die letzte Gleichung des Systems $0 = 0$ und ist somit sowieso überflüssig.

Um die zweitletzte Gleichung des Systems zu erfüllen, kann man zum Beispiel

$$z = 0 \text{ und } y = -\frac{1}{2}$$

wählen. Wenn man diese Werte in die erste Gleichung einsetzt, kann man den zugehörigen Wert für x bestimmen:

$$x = -y - z = \frac{1}{2}.$$

Eine andere Lösung könnte man konstruieren, indem man in der zweiten Gleichung

$$y = 0 \text{ und } z = -\frac{1}{3}$$

wählt. Aus der ersten Gleichung kann dann der Wert für x bestimmt werden:

$$x = x = -y - z = \frac{1}{3}.$$